III. „Mechanické" derivování:

Vypočítejte parciální derivace 1. a 2. řádu všude, kde existují, funkcí:

a) $f(x,y) = x\sqrt{y} + \frac{y}{x}$; $f(x,y) = e^{x^2-y}$; $f(x,y) = e^{x^2y}$; $f(x,y) = \ln(xy-1)$; $f(x,y) = arctg\,\frac{x+y}{x-y}$

b) $f(x,y,z) = \sqrt{z - x^2 - y^2}$; d*) $f(x,y,z) = x^{\left(\frac{y}{z}\right)}$.

To, co je třeba vědět o parciálních derivacích funkcí více proměnných, a jejich výpočtu, je podrobně (a snad i „čitelně") v přednášce pro MA2 z 23.3.20, str. 12–19.

Stručné shrnutí pro funkce dvou proměnných:

je dána funkce $f : M \subset R^2 \to R$, $M^0 \neq \emptyset$ (tj. M „má" vnitřní body), a nechť $(x_0, y_0) \in M^0$ (tj. (x_0,y_0) je vnitřní bod definičního oboru – parciální derivace definujeme jen ve vnitřních bodech); pak parciální derivace funkce f podle x v bodě (x_0,y_0) je

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0}$$

a parciální derivace funkce f podle y v bodě (x_0,y_0) je

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0,y) - f(x_0,y_0)}{y - y_0} .$$

„Prakticky" – parciální derivace funkce dvou proměnných je vlastně „obyčejná" derivace funkce jedné proměnné, kterou získáme „tak, že „upevníme" druhou proměnnou fce f, tj. $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ je derivace funkce $f(x,y_0)$ „proměnné x" v bodě $x = x_0$, analogicky $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ je derivace funkce $f(x_0,y)$ „proměnné y" v bodě $y = y_0$.

A podobně, jako u funkcí jedné proměnné, kromě parciálních derivací funkce f v bodě $(x_0,y_0)\in M^\circ$ (tj. $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$) budeme uvažovat parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ jako funkce, definované v těch vnitřních bodech M, kde existují.
A pak můžeme tyto parciální derivace, uvažované jako funkce, dále derivovat – a dostáváme tak derivace druhého řádu, a případně i řádů vyšších (jsou-li definovány).

Parciální derivace druhého řádu funkce $f(x,y)$ jsou:
(opět jen ve vnitřních bodech M)

„nesmíšené":
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y)$$

a tzv. „smíšené" derivace:
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) \quad \text{a}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y).$$

Smíšené derivace mohou obecně záviset na pořadí derivování, ale platí užitečná věta (o záměně pořadí derivování)

<u>Věta</u>: Je-li $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ spojitá v bodě (x_0,y_0), pak v bodě (x_0,y_0) existuje i $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0)$ a platí $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0)$

(Říká se, že derivace smíšené jsou záměnné.)

Obecně, parciální derivace funkce f n-tého řádu ($n>2$) je derivace dle zvolené „proměnné" parciální derivace funkce f řádu ($n-1$) (některé – dle zadání). A opět platí záměnnost parciálních derivací v bodech, kde jsou spojité (pak při derivování nezáleží na pořadí derivování podle jednotlivých proměnných.

Příklad:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x,y) \underset{(def.)}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)(x,y)$$ – smíšená derivace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^3}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)(x,y)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)(x,y)$$

(a dále podobně).

<u>Parciální derivace funkce n-proměnných</u> ($n=3,4,\dots$)

se definují „stejně":

je-li $f: M\subset R^n \to R$, $A=[a_1,a_2,\dots,a_n]\in M^\circ$, pak

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1,a_2,\dots,a_n)=\lim_{x_i\to a_i}\frac{f(a_1,\dots a_{i-1},x_i,\dots a_n)-f(a_1,a_2,\dots,a_{i-1},a_i,a_{i+1},\dots a_n)}{x_i-a_i}$$

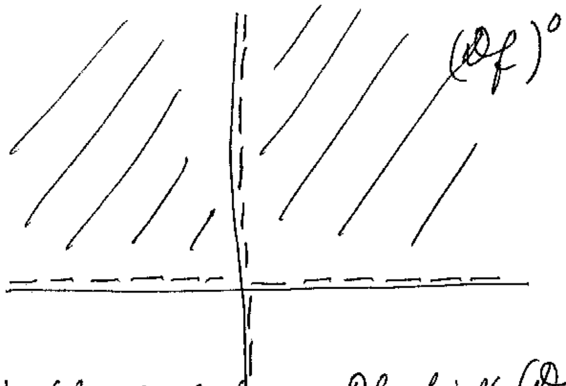
($i=1,2,\dots n$)

<u>„Zjednodušeně"</u>:

$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1,\dots a_n)$ „zjednodušeně znamená" derivaci funkce jedné proměnné x_i – tj. fce $f(a_1,\dots a_{i-1},x_i,a_{i+1},\dots,a_n)\,(=g(x_i))$ podle této proměnné x_i v bodě $x_i=a_i$.

A výpočet parciálních derivací v příkladu zadaných funkcí:

a) 1) $f(x,y) = x\sqrt{y} + \frac{y}{x}$



$\mathcal{D}f = \{[x,y];\ x \neq 0 \wedge y \geqq 0\}$

$(\mathcal{D}f)^0 = \{[x,y];\ x \neq 0 \wedge y > 0\}$

parciální derivace počítáme ve vnitřních bodech z $\mathcal{D}f$, tj. v $(\mathcal{D}f)^0$:

$(x,y) \in \mathcal{D}f^0$ (tj. $x \neq 0$ a $y > 0$):

(i) $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x\sqrt{y} + \frac{y}{x}\right) \overset{\text{„derivace součtu"}}{=} \frac{\partial}{\partial x}(x\sqrt{y}) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right) \overset{\text{„y" je „konstanta"}}{=}$$

$$= 1\cdot\sqrt{y} + y\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \sqrt{y} - \frac{y}{x^2}$$

(ii) $$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x\sqrt{y} + \frac{y}{x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(x\sqrt{y}) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right) \overset{\text{„x" je konstanta}}{=}$$

$$= x\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{x}\cdot 1 = \frac{x}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{x}$$

a derivace druhého řádu:

(iii) $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{y} - \frac{y}{x^2}\right) \overset{\text{„y" je „konstanta"}}{=} 0 - y\left(\frac{-2}{x^3}\right) =$$

$$= \frac{2y}{x^3}$$

(iv) $$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{x}\right) \overset{\text{„x" je konstanta}}{=} \frac{x}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}\right) + 0 =$$

$$= -\frac{x}{4(\sqrt{y})^3}$$

(v) a smíšené derivace:

$$\frac{\partial f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{y} - \frac{y}{x^2}\right) \underset{\text{„}x\text{"-konstanta}}{=} \frac{1}{2\sqrt{y}} - \frac{1}{x^2}\ ;$$

derivace „vyšla" spojitá v $\mathcal{D}f^\circ$, tedy smíšené derivace mají být „záměnné" – tak to zkusme (zároveň „trénujeme" derivování):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{x}\right) \underset{\text{„}y\text{"-konstanta}}{=} \frac{1}{2\sqrt{y}} - \frac{1}{x^2} \quad (\text{cbd!})$$

A vyšlo to!

A poznámka k výpočtu parciálních derivací:

snad je „jasné", protože parciální derivace jsou vlastně derivace funkce jedné proměnné, že budou platit pravidla „stejná" pro derivaci součtu, součinu i podílu, jako pro derivování funkcí jedné proměnné; vzorce pro derivování funkce složené zatím můžeme použít pro funkce složené tak, že vnější funkce bude funkce jedné proměnné, a vnitřní pak už je funkce n proměnných (spec. $n=2,3$), tj.:

pro $h(x_1,x_2 .. x_n) = f(g(x_1,x_2 .., x_n))$, kde $f = f(t)$, $t \in M \subset R$;

pak: $$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x_1,x_2 .. x_n) = f'(g(x_1,x_2, .. x_n)) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(x_1,x_2 .., x_n)$$

(nechť „vše" existuje).

2) $f(x,y) = e^{x^2-y}$

$D_f = R^2$ – otevřená množina, derivace existují v libovolném bodě $(x,y) \in R^2$.

A zde užijeme předchozí poznámku – funkce $f(x,y)$ je složená, $f(x,y) = g(h(x,y))$, kde $g(t) = e^t$, a $t = h(x,y) =: x^2-y$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{x^2-y}\right) = e^{x^2-y} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(x^2-y) = 2x\,e^{x^2-y};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x^2-y}\right) = e^{x^2-y} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(x^2-y) = -e^{x^2-y};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x\,e^{x^2-y}\right) = 2\left(e^{x^2-y} + x \cdot e^{x^2-y} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(x^2-y)\right) =$$

derivace součinu a složené fce

$$= 2\,e^{x^2-y}\left(1 + x \cdot 2x\right) = 2e^{x^2-y}(1+2x^2)$$

(a už „rychleji"):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-e^{x^2-y}\right) = -e^{x^2-y} \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}(x^2-y)}_{(=-1)} = e^{x^2-y}$$

derivace složené fce

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2x\,e^{x^2-y}\right) = 2x\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x^2-y}\right) = 2x \cdot e^{x^2-y}(-1) = -2x\,e^{x^2-y}$$

a „pro kontrolu" ($\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$ je spojitá v R^2, tj. derivace jsou záměnné)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-e^{x^2-y}\right) = -e^{x^2-y}\frac{\partial}{\partial x}(x^2-y) = -2x\,e^{x^2-y}$$

3) $f(x,y) = e^{x^2 y}$

$D_f = R^2$ – otevřená množina, derivace existují v každém bodě $(x,y) \in R^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{x^2y}\right) = e^{x^2y} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(x^2y) = \underline{2xy\,e^{x^2y}};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x^2y}\right) = e^{x^2y} \frac{\partial}{\partial y}(x^2y) = \underline{x^2 e^{x^2y}};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2xy\,e^{x^2y}\right) = 2\left(y e^{x^2y} + xy e^{x^2y} \cdot 2xy\right) = \underline{2y e^{x^2y}(1+2x^2y)};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 e^{x^2y}\right) = x^2 \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x^2y}\right) = x^2 e^{x^2y} \cdot x^2 = \underline{x^4 e^{x^2y}};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2xy\,e^{x^2y}\right) = 2x\left(e^{x^2y} + y e^{x^2y} \cdot x^2\right) = \underline{2x e^{x^2y}(1+x^2y)};$$

a zkusíme i (derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ je spojitá v R^2, tedy $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$)

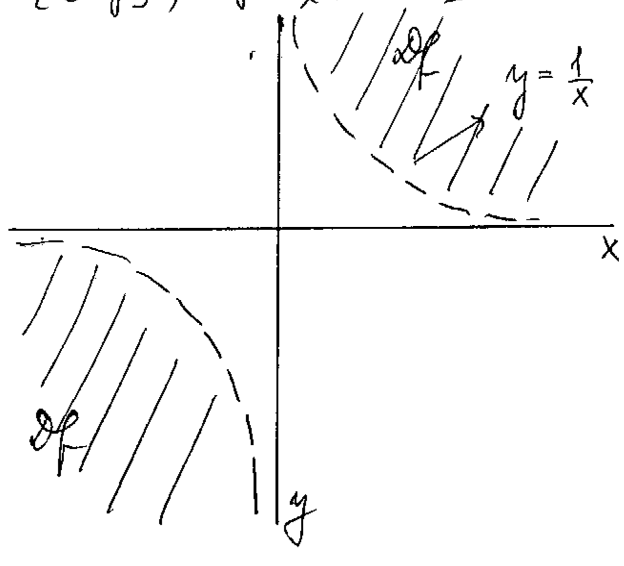
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 e^{x^2y}\right) = 2x e^{x^2y} + x^2 e^{x^2y} \cdot 2xy = \underline{2x e^{x^2y}(1+x^2y)}$$

4) $f(x,y) = \ln(xy-1)$

$D_f = \{[x,y];\ xy-1>0\} =$

$= \{[x,y];\ y > \frac{1}{x},\ x>0\} \cup \{[x,y];\ y < \frac{1}{x},\ x<0\}$

D_f je otevřená množina, parciální derivace existují v každém bodě $(x,y) \in D_f$



$$\underline{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\ln(xy-1)\right) = \underline{\frac{1}{xy-1}\cdot y}$$

$$\underline{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\ln(xy-1)\right) = \underline{\frac{1}{xy-1}\cdot x}$$

$$\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{xy-1}\right) = y\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{xy-1}\right) = y\cdot\frac{-y}{(xy-1)^2} = \underline{\frac{-y^2}{(xy-1)^2}}$$

$$\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{xy-1}\right) = x\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{xy-1}\right) = x\cdot\frac{-x}{(xy-1)^2} = \underline{-\frac{x^2}{(xy-1)^2}}$$

(dala se tato derivace i „najít" záměnou „y" a „x" v $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$)

$$\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{xy-1}\right) = \frac{1\cdot(xy-1) - y\cdot x}{(xy-1)^2} = \underline{\frac{-1}{(xy-1)^2}} \quad \text{a}$$

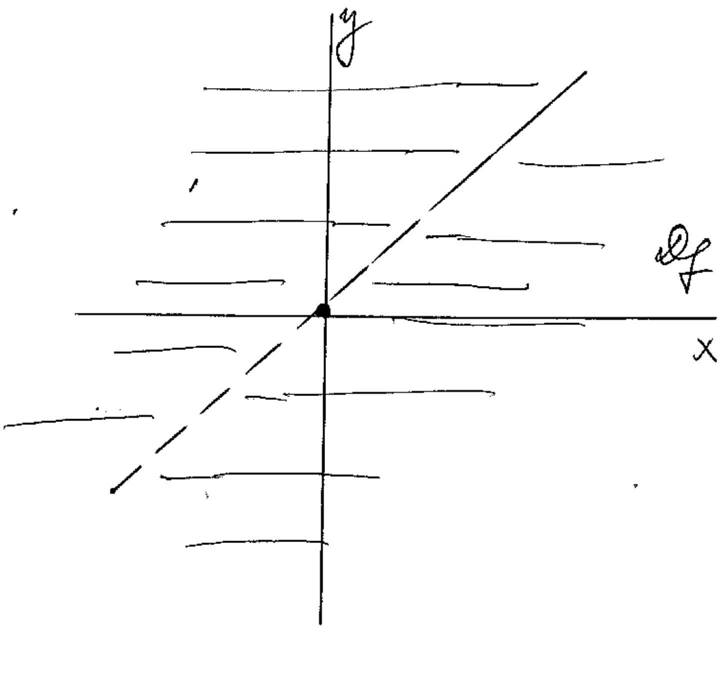
$$\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{xy-1}\right) = \frac{1(xy-1) - x\cdot y}{(xy-1)^2} = \underline{\frac{-1}{(xy-1)^2}}$$

(smíšené derivace jsou opět záměnné, neboť jsou spojité v Df – – upřel to „potvrdit", ale věděli jsme to již „hned" po „spočítání" $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)$)

5) $\underline{f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x+y}{x-y}\right)}$

$Df = \{[x,y];\ x \neq y\}$ – opět.

Df je množina otevřená, parciální derivace funkce f existují v každém bodě $[x,y] \in Df$;



$$\underline{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)} = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x+y}{x-y}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2}\cdot\frac{(x-y)-(x+y)}{(x-y)^2} =$$

$$= \frac{-2y}{(x-y)^2+(x+y)^2} = \underline{\frac{-y}{x^2+y^2}}$$

$$\underline{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)} = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x+y}{x-y}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2}\cdot\frac{x-y-(x+y)(-1)}{(x-y)^2} =$$

$$= \frac{2x}{(x-y)^2+(x+y)^2} = \underline{\frac{x}{x^2+y^2}}$$

$$\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) = -y(-1)(x^2+y^2)^{-2}\cdot 2x = \underline{\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}}$$

$$\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = x(-1)(x^2+y^2)^{-2}\cdot 2y = \underline{\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}}$$

$$\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) = -\frac{x^2+y^2-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \underline{\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}},$$

derivace smíšená je opět spojitá v D_f, tedy derivace smíšené jsou záměnné – jako „cvičení" ještě „spočítáme":

$$\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2+y^2-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \underline{\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}};$$

b) 1) $f(x,y,z) = \sqrt{z-x^2-y^2}$

$D_f = \{[x,y,z] \in R^3;\ z-x^2-y^2 \geq 0\}$ – jak si můžeme D_f představit?

Hranice D_f, $\partial(D_f) = \{[x,y,z];\ z = x^2+y^2\}$, to jest $\partial(D_f)$ je rotační paraboloid (viz přednáška MA2, 18.3. (první část))

a pro $[x,y,z] \in D_f$ je $z \geq x^2+y^2$, tedy D_f si můžeme „představit" jako množinu bodů v prostoru, které jsou buď body paraboloidu, nebo leží „nad" paraboloidem ($z > x^2+y^2$, a $z = x^2+y^2$ platí pro body paraboloidu). Tedy, D_f je množina uzavřená, body hranice leží v D_f, a derivovat budeme v bodech vnitřních D_f – $(D_f)^0 = \{[x,y,z] \in R^3;\ z > x^2+y^2\}$.

Výpočet parciálních derivací: v $(D_f)^0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{z-x^2-y^2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{z-x^2-y^2}} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(z-x^2-y^2) =$$

opět - složená funkce,
y, z - konstantní

$$= \frac{-2x}{2\sqrt{z-x^2-y^2}} = \frac{-x}{\sqrt{z-x^2-y^2}};$$

analogicky (zkuste „sami")

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{-y}{\sqrt{z-x^2-y^2}};$$ (jen se „vymění" „x" a „y")

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\sqrt{z-x^2-y^2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{z-x^2-y^2}}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(z-x^2-y^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{z-x^2-y^2}}$$

a derivace druhého řádu:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{\sqrt{z-x^2-y^2}}\right) = -\frac{\sqrt{z-x^2-y^2} - x\cdot\frac{-x}{\sqrt{z-x^2-y^2}}}{z-x^2-y^2} =$$

$$= -\frac{z-x^2-y^2+x^2}{(z-x^2-y^2)^{3/2}} = \frac{y^2-z}{\left(\sqrt{z-x^2-y^2}\right)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{\sqrt{z-x^2-y^2}}\right) = \frac{x^2-z}{\left(\sqrt{z-x^2-y^2}\right)^3}$$ (podobně se „spočítá" jako $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2\sqrt{z-x^2-y^2}}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(z-x^2-y^2\right)^{-1/2} =$$

$$= -\frac{1}{4}\left(z-x^2-y^2\right)^{-3/2} = -\frac{1}{4}\frac{1}{\left(\sqrt{z-x^2-y^2}\right)^3}$$

a derivace smíšené:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-x}{\sqrt{z-x^2-y^2}}\right) = -x\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\left(z-x^2-y^2\right)^{-1/2}\right) =$$

$$= -x\left(-\frac{1}{2}\right)\left(z-x^2-y^2\right)^{-3/2}\cdot(-2y) = \frac{-xy}{\left(\sqrt{z-x^2-y^2}\right)^3} =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y,z)$$ – zaměnnost derivací díky spojitosti derivace v $(\mathcal{D}f)^\circ$

$$\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z)} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{-x}{\sqrt{z-x^2-y^2}}\right) = -x\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\left(z-x^2-y^2\right)^{-1/2}\right) =$$

$$= \frac{x}{2}\left(z-x^2-y^2\right)^{-3/2} = \underline{\frac{x}{2\left(\sqrt{z-x^2-y^2}\right)^3}} =$$

$$= \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z)} \quad \left(\text{záměnnost díky spojitosti } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\right)$$

a bude asi i

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z), \text{ pokud budou derivace spojité},$$

a zde je asi jednodušší výpočet

$$\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z)} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2\sqrt{z-x^2-y^2}}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\left(z-x^2-y^2\right)^{-1/2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{4}\left(z-x^2-y^2\right)^{-3/2}\cdot(-2y) = \underline{\frac{y}{2\left(\sqrt{z-x^2-y^2}\right)^3}},$$

a záměnnost platí – $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}$ je funkce spojitá v $(\mathcal{D}f)^\circ$.

2) (*) $\underline{f(x,y,z) = x^{\left(\frac{y}{z}\right)}} \underset{\text{def.}}{=} e^{\frac{y}{z}\cdot \ln x}$ (viz MA1)

(nepovinné !)

$\mathcal{D}f = \{[x,y,z] \in R^3 ;\ x>0 \wedge z \neq 0\}$ – $\mathcal{D}f$ je množina otevřená;

pro $(x,y,z) \in \mathcal{D}f \ (=(\mathcal{D}f)^\circ)$:

$$\underline{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)} = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\frac{y}{z}\ln x}\right) = e^{\frac{y}{z}\ln x}\cdot\frac{y}{z}\cdot\frac{1}{x} =$$

$$= \underline{x^{\frac{y}{z}-1}\cdot\frac{y}{z}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{\frac{y}{z}\ln x} \right) = \underline{x^{\frac{y}{z}} \cdot \frac{\ln x}{z}} \qquad \left(\text{zde píšu } e^{\frac{y}{z}\ln x} = x^{\frac{y}{z}}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}\left(e^{\frac{y}{z}\cdot\ln x} \right) = \underline{x^{\frac{y}{z}} \cdot \left(-\frac{y}{z^2}\ln x\right)} \;;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^{\frac{y}{z}-1} \cdot \frac{y}{z} \right) = \underline{\frac{y}{z}\left(\frac{y}{z}-1\right) \cdot x^{\frac{y}{z}-2}} \;;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\ln x}{z} \cdot x^{\frac{y}{z}} \right) = \frac{\ln x}{z}\frac{\partial}{\partial y}\left(x^{\frac{y}{z}} \right) = \underline{\left(\frac{\ln x}{z}\right)^2 x^{\frac{y}{z}}} \;;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{y}{z^2}\ln x \cdot x^{\frac{y}{z}} \right) = \underline{x^{\frac{y}{z}}\left[\left(\left(-\frac{y}{z^2}\ln x\right)^2 + \frac{2y}{z^3}\right)\right]}$$

(derivace součinu)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\ln x}{z}\, x^{\frac{y}{z}} \right) = \underline{x^{\frac{y}{z}-1}\left(\frac{1}{z}\right)\left(1+\frac{y}{z}\ln x\right)} =$$

$$= \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z)} \quad \text{(díky spojitosti – záměnnost)}$$

$$\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) = x^{\frac{y}{z}-1}\left(-\frac{y}{z^2}\right)\left(1+\frac{y}{z}\ln x\right)}$$

$$\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z) = -x^{\frac{y}{z}}\frac{\ln x}{z^2}\left(1+\frac{y}{z}\right)}$$

(Tyto derivace jsou „težké", tak si s nimi nemusíte dělat starosti.

<u>A na závěr</u> – v části II jsme se měli pokusit představit si grafy funkcí dvou proměnných v 1a), 1b.

Přikládám několik obrázků z přednášky pro MA1 z 18.3.20, kde je to podrobně popsáno a vysvětleno i na funkcích jednodušších (na začátku) (snímky 4–7 z přednášky)

Příklady

1) $f(x,y) = x^2+y^2$; $\mathcal{D}_f = R^2$ ($\mathcal{D}_f$ - definiční obor f)

(pro $n=2$ se píše zpravidla místo $(x_1,x_2) \to (x,y)$
pro $n=3$ místo (x_1,x_2,x_3) většinou „píšeme" (x,y,z))

A co „bude" graf fce f ? - označíme G_f) :
zde: $G(f) = \{ [x,y,z] ; (x,y) \in R , z = x^2+y^2 \}$

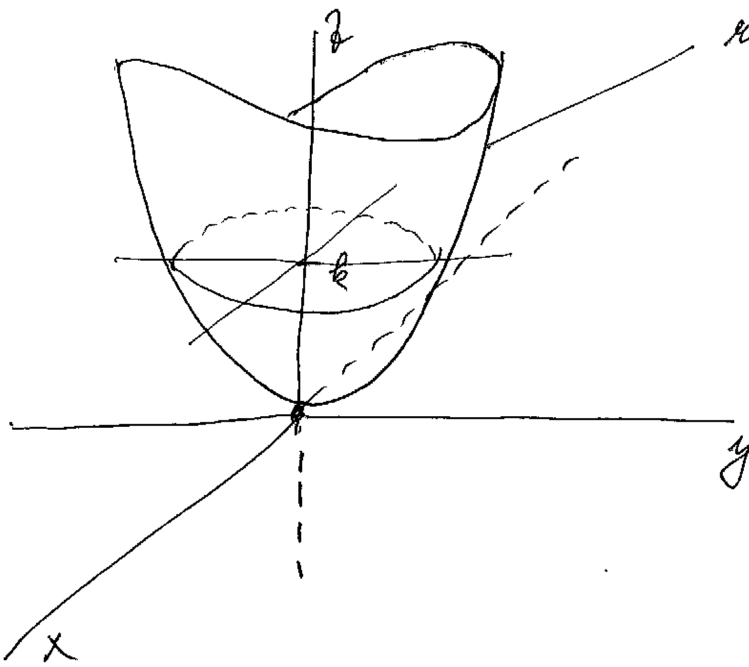
(obecně pro funkci $f: M \subset R^n \to R$ grafem se nazývá množina $G(f) = \{ [x_1,..,x_n,y] ; (x_1,..,x_n) \in \mathcal{D}f, y = f(x_1,..,x_n) \}$, $G(f) \subset R^{n+1}$)

Grafem funkce v našem příkladě je plocha (asi si dovedeme plochu představit, i když ji nemáme přesně „definovanou") – a zkusme tak, jako na mapě si, když si „kopec" dokážeme představit pomocí vrstevnic :

Hledejme množiny bodů v $\mathcal{D}f$, kde z=konstanta ;
tj. $x^2+y^2 = k$ – zřejmě pro $k \geq 0$ (na „mapě" – tj. v rovině $z=0$)
$k=0 \to [x,y] = [0,0]$;
$k>0$ – dostaneme $\{ [x,y] ; x^2+y^2 = k \}$ – což je kružnice o středu v počátku a poloměru $\sqrt{k}$ – to je ta „vrstevnice" ve výšce $\underline{k}$; tedy „řez" naší plochy rovinou $z = k$ je kružnice o středu na ose z $[0,0,k]$ a poloměru $\sqrt{k}$ – taková plocha vznikla rotací „nějaké" křivky kolem osy z (- jaké?) a nazývá se rotační plocha

Zkusme najít „křivku", která rotuje v našem příkladu (kolem osy z) – uděláme „řez" rovinou $x = 0$ –
– dostaneme : $z = y^2$ – což je známá křivka (parabola)

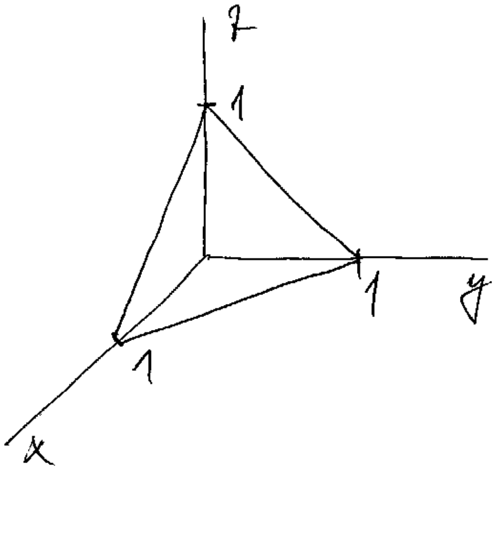
A plocha, která vznikla rotací paraboly (zde) $z = y^2$ se nazývá „rotační paraboloid" –
a (neumělý) náčrtek grafu fce $f(x,y) = x^2+y^2$



rovnice této plochy:
$z = x^2+y^2, \ (x,y) \in R^2$

A další (jednoduché) příklady

2.) $f(x,y) = 1-x-y$, $(x,y) \in R^2$ opět, a graf –
– množina bodů $[x,y,z]$, kde $z = 1-x-y$ – rovina

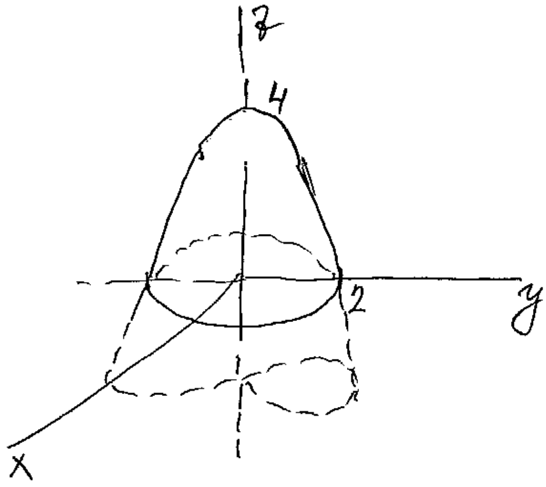


← co je z grafu „vidět" při pohledu ze směru kladné poloosy x

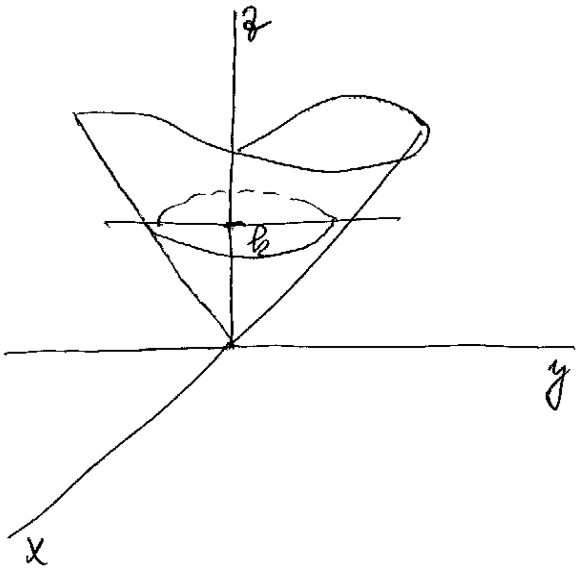
(omlouvám se, tento příklad měl být příkladem prvním)

3.) $\underline{f(x,y) = 4-(x^2+y^2)}$: – $D_f = R^2$, a graf – – „asi" obrácený (dolů) rotační paraboloid s vrcholem v bodě $[0,0,4]$

(vrstevnice v rovině $z=0$
$x^2+y^2=4$)



4.) $\underline{f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}}$: $D_f = R^2$, a graf ? (pokus)
„vrstevnice" („ekviskalární" křivky dle matematiků) jsou opět kružnice v rovině pro $z=k$: $\sqrt{x^2+y^2} = k$,
tj: $x^2+y^2 = k^2$



a „řez" rovinou $x=0$:
„$z=\sqrt{y^2}$, tj. $z=|y|$ –
– tj. tento „graf" rotuje kolem osy z – vytváří t.zv. kuželovou plochu

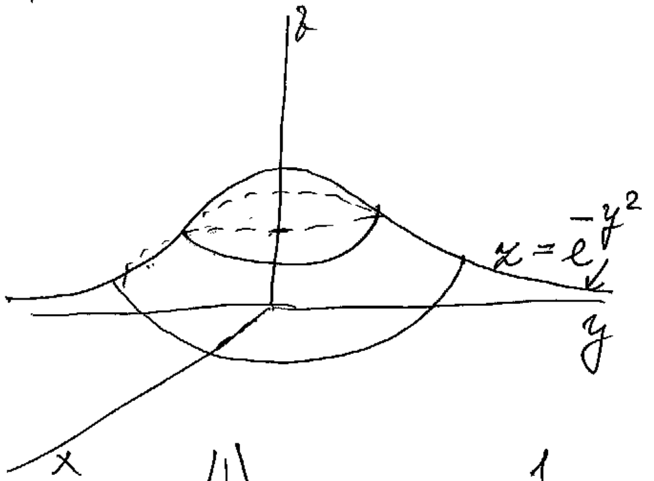
A zkuste „sami" si představit i graf fce

$\underline{f(x,y)=\sqrt{4-(x^2+y^2)}}$; zde $D_f = \{[x,y];\ 4-(x^2+y^2) \geq 0\}$
$= \{[x,y];\ x^2+y^2 \leq 4\}$ –
– tj. def. obor je kruh o středu v $[0,0]$ a poloměru $r=2$

5) a příklady dalších „hezkých" funkcí dvou proměnných, jejichž graf je rotační plocha:

a) $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$:

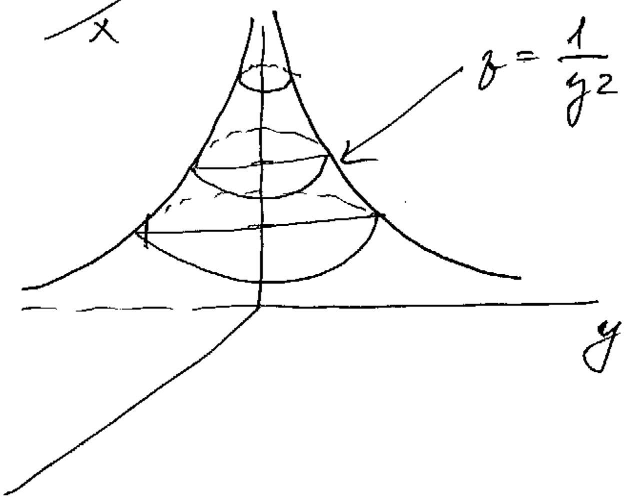
$D_f = R^2$ – graf vznikne rotací známé „přírodovědecké" křivky – grafu fce $z = e^{-y^2}$



b) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$:

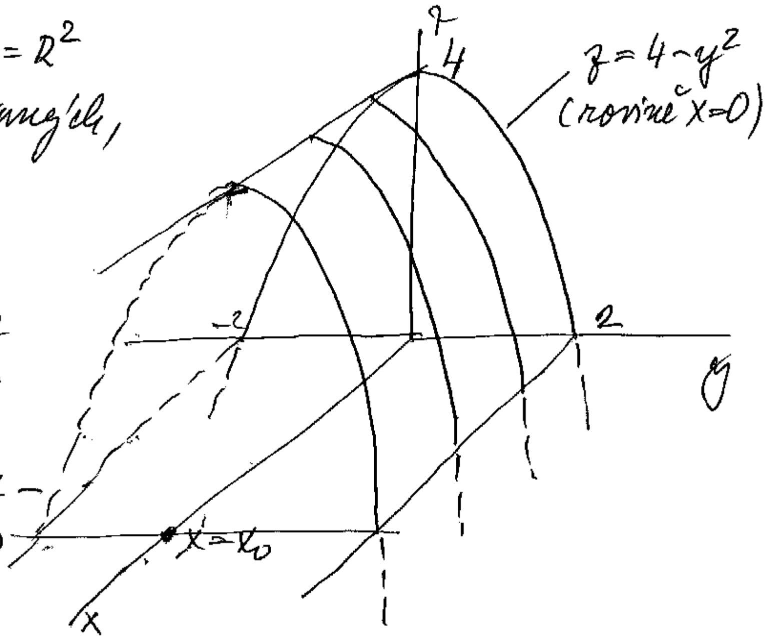
$D_f = \{[x,y];\, x^2+y^2 \neq 0\}$
$= R^2 \setminus \{[0,0]\}$

a graf vznikne rotací křivky – grafu fce $z = \dfrac{1}{y^2}$ (naše známá fce)



6) $f(x,y) = 4 - y^2$ – $D_f = R^2$

i toto je funkce dvou proměnných, je konstantní vzhledem k proměnné x – tj. „řezy rovinami $x = x_0$ jsou stále stejné" – a mají rovnice „$z = 4 - y^2$ – neboli paraboly – – takové plochy se nazývají „válcové" plochy



(omluva za „neumělé" náčrtky „jen rukou")